Wachstumsvorgänge

Linearer- und Expotentieller-Wachstum

Peter Christian

17. Dezember 2006

1 Linearer Wachstum

Definition: Beim linearen Wachstum ist die Wachstumsrate (Bestandsänderung) für alle Zeiten t konstant, sie ist nicht vom Bestand $B(t)$ abhängig. Die zugehörige Differentialgleichung (DGL) lautet damit:

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = \dot{B}(t) = konst. \tag{1}$$

Diese Gleichung lässt sich leicht durch Trennung der Variablen lösen. Es ergibt sich schließlich die Wachstumsfunktion des Linearen-Wachstums:

$$\boxed{B(t) = m \cdot t + c} \tag{2}$$

Dabei ist m die Wachstumsrate und beschreibt, wie schnell der Bestand anwächst, t ist die vergangene Zeit und c bezeichnet den Anfangsbestand, also den Bestand $B(t = 0)$.

Soll eine Aufgabe zum Linearen-Wachstum gelöst werden, so ist es sinnvoll nach folgendem Schema vor zugehen:

1. Aufschreiben der gesuchten sowie der gegebenen Größen. Meist ist der Anfangsbestand sowie der Wachstum in einem bestimmten Zeitraum ($\Delta t = t_1 - t_0$) gegeben. Gesucht ist dann der Bestand zu einem anderen Zeitpunkt t_2.

2. Bestimmen des Anfangsbestandes $c = B(0)$

3. Ausrechnen der Wachstumsrate m auf der gesuchten Zeitskala. Beispielsweise könnte ein jährlicher Wachstum gegeben sein, während der Wachstum innerhalb von 2 Tagen gesucht ist. Hier führt meist eine einfache Rechnung über Dreisatz zum Erfolg.

4. Die bestimmten Größen m und c in die Wachstumsfunktion (2) zusammen mit der verstrichenen Zeit t einsetzten und den Bestand ausrechnen.

1.1 Beispiel für den linearen Wachstum

Wichtig ist in diesem Fall, dass die Bedingung unabhängig vom bisherigen Bestand ist, was wie folgt aussehen könnte:

> „*Das Gehirn eines durchschnittlichen Erwachsenen besteht aus* $3.5 \cdot 10^{11}$ *Gehirnzellen. Angenommen, es würden jeden Tag 100000 Zellen absterben*[1]*, wieviel Prozent der Gehirnzellen wären dann nach 70 Jahren noch vorhanden?*“

Zunächst sollen die Fakten noch einmal in einer Zusammenfassung wieder gegeben werden:

- **Gesucht:** Die verbleibenden Gehirnzellen nach 70 Jahren in Prozent
- **Gegeben:** Der anfängliche Zahl der Gehirnzellen sowie die tägliche Abnahme
- **Benötigen:** Die zugehörige Wachstumsfunktion

Da die Abnahme der Gehirnzellen in Tagen angegeben ist, muss zunächst der jährliche Verlust bestimmt werden:

$$100000 \left[\frac{\text{Zellen}}{\text{Tag}}\right] \cdot 356 \left[\frac{\text{Tage}}{\text{Jahr}}\right] = 35.6 \cdot 10^6 \left[\frac{\text{Zellen}}{\text{Jahr}}\right]$$

Dies entspricht nun unserer Wachstumsrate m in „Zellen pro Jahr“. Gesucht ist allerdings die verbleibende Zahl in Prozent, daher muss noch eine kleine Umrechung erfolgen:

$$\begin{aligned} 3.5 \cdot 10^{11} &\mathrel{\hat{=}} 100\% \\ \Rightarrow\ 1 &\mathrel{\hat{=}} \frac{100\%}{3.5 \cdot 10^{11}} \\ \Rightarrow\ 35.6 \cdot 10^6 &\mathrel{\hat{=}} 100\% \cdot \frac{35.6 \cdot 10^6}{3.5 \cdot 10^{11}} \end{aligned}$$

Damit wurde m zu $m = 0.01017$ % pro Jahr bestimmt. Da der Angangsbestand B(0) bereits gegeben ist, lässt sich der Endbestand nach 70 Jahren durch die Wachstumsfunktion (2) bestimmen:

$$\boxed{B(t) = -0.01017 \left[\frac{\%}{\text{Jahr}}\right] \cdot 70\ [\text{Jahre}] + 100\ [\%] = 99.2881\ [\%]}$$

Zu Beachten ist hier noch das negative Vorzeichen vor m, das sehr wichtig ist, da es sich um eine Abnahme handelt. Somit erhalten wir das durchaus erstaunliche Ergebnis, dass nach 70 Jahren noch stolze 99.2881% der Gehirnzellen vorhanden sind.

[1] Es sollte beachtet werden, dass dieser Wert durch Alkohol- oder Drogengenuß, erheblich gesteigert werden kann!

2 Expotentielles-Wachstum

Definition: Bei Expotentiellen-Wachstum hängt die Wachstumsrate vom aktuellen Bestand $B(t)$ ab. Zinseszins ist hierfür das Paradebeispiel, bei dem jeweils der aktuelle Bestand an Geld verzinst wird. Als DGL ergibt sich hier für den Wachstum des Bestandes:

$$\dot{B}(t) = konst. \cdot B(t) \tag{3}$$

Diese Differentialgleichung wird erfahrungsgemäß durch den Ansatz $\mu \exp(\lambda \cdot t)$ gelöst. Wobei λ und μ beliebige (komplexe) Konstanten sind. Setzt man dies in (3) ein, so ergibt sich:

$$\mu\,\lambda\,\mathrm{e}^{\lambda\,t} = konst. \cdot \mu\,\mathrm{e}^{\lambda\,t} \Rightarrow \lambda = konst.$$

Außerdem findet man für $t = 0$ noch die Beziehung: $B(0) = \mu$, weshalb sich die bisherige Wachstumsfunktion zu $B(t) = B(0)\,\mathrm{e}^{\lambda\,t}$ ergibt. Allerdings lässt sich λ nicht weiter bestimmen, da keine Randbedingungen gegeben sind. Bekannt ist nur, dass es sich um eine Konstante handeln muss. Willkührlich wählen wir daher $\lambda = \ln(a)$, wobei a eine beliebige, positive reelle Zahl ist. Die dabei vorgenommene Einschränkung an die Konstante fällt dabei nicht ins Gewicht, da bei allen realen Beispielen ohnein diese Forderung erfüllt ist. Wir erhalten also folgende Beziehung:

$$B(t) = B(0)\,\mathrm{e}^{t \cdot \ln(a)}$$

Mit den bekannten Rechenregeln für Logarithmen ergibt sich daher als Wachstumsfunktion:

$$\boxed{B(t) = B(0) \cdot a^t} \tag{4}$$

Wie bereits erwähnt ist hierbei $B(0)$ der Anfangsbestand und a eine beliebige, reelle Konstante. Analog zum Linearen-Wachstum ergibt sich hier ein Schema, das zur Bestimmung der Wachstumsfunktion angesetzt werden kann:

1. Auch hier sollte zunächst eine Gegenüberstellung der gegebenen und der gesuchten Größen erfolgen.
2. Der Anfangsbestand $B(0)$ wird aus dem Text heraus gelesen.
3. Es wird a bestimmt, wozu $B(t = 1)$ zu bestimmen ist.
4. Die bestimmten Größen werden in die Wachstumsfunktion (4) eingesetzt.

2.1 Beispiel für den expotentiellen Wachstum

Da mir hier noch ein Beispiel sehr gut im Gedächtnis ist, möchte ich dieses hier ausführlich diskutieren:

> "*Im Jahre 1626 kaufte der niederländische Siedler Peter Minuit den eingeborenen Indianern das Grundstück ab, auf dem heute New York City (Manhattan) steht. Er bezahlte dafür einen Preis von 60 Gulden, was etwa 24*

Dollar entspricht. Bestimmen sie den Kontostand der Indianer in Dollar, wenn diese ihre Einnahmen mit jährlich 6% Zinsen auf der Bank angelegt hätten.“

Zunächst möchte ich die Aufgabe noch einmal zusammen fassen:

- **Gesucht:** Der Kontostand im Jahre 2006, also nach 380 Jahren
- **Gegeben:** Der Anfangsbestand von 24 Dollar sowie der jährliche Zinssatz von 6%
- **Benötigen:** Die zugehörige Wachstumsfunktion

Da der Zins bereits in der Zeitskala „Jahre“ angegeben ist, muss hier keine Umrechung mehr erfolgen. Des Weiteren haben wir den Anfangsbestand von 24 Dollar bereits dem Text entnommen. Es bleibt also noch a zu bestimmen, dazu betrachten wir $B(1)$, also den Betrag nach einem Jahr:

$$B(1) = B(0) \cdot a^1 = 24\,\text{Dollar} + \text{Zinsen} \tag{5}$$

Wir benötigen allerdings noch die Zinsen, die in einem Jahr fällig werden. Der Zinssatz beträgt 6%, man kann daher sehr leicht über den Dreisatz die Zinsen bestimmen:

$$\begin{aligned} 100\% &\mathrel{\widehat{=}} 24 \\ \Rightarrow \quad 1\% &\mathrel{\widehat{=}} \frac{24}{100} \\ \Rightarrow \quad 6\% &\mathrel{\widehat{=}} 24 \cdot \frac{6}{100} \end{aligned}$$

Damit haben wir die Zinsen erhalten und können sie in (5) einsetzen:

$$B(1) = B(0) \cdot a^1 = 24 + 24 \cdot \frac{6}{100} = 24 \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{6}{100}\right)}_{a} \tag{6}$$

Wir haben nun also den gesuchten Faktor a erhalten und können ihn nun in die Wachstumsfunktion (4) einsetzten:

$$B(t) = B(0) \cdot a^t = 24 \cdot \left(1 + \frac{6}{100}\right)^t$$

Setzen wir nun noch als Zeit t die gegebenen 380 Jahre ein, so erhalten wir:

$$\boxed{B(t) = 24 \cdot \left(1 + \frac{6}{100}\right)^{380} = 9.918363992 \cdot 10^{10}\,\text{Dollar}}$$

Die Indianer hätten also eine ganz schön stolze Summe ansparen können, auch wenn es sicherlich nicht reichen würden, um Manhattan zurück zu kaufen.